**Современная теория игр и ее применения (Вега, Москва 2022)**

**Василий Никитич Колокольцов**

**Вопросы к экзамену**

Часть 1

1. Определение симметричных игр и игр с нулевой суммой. Игра в нормальной форме. Дилемма заключенных и другие примеры социальных дилемм. Метод исключения доминируемых стратегий, Парето эффективное решение, равновесие по Нэшу. Дилемма Битва полов. Категорический императив Канта.

2. Простейшие игры многих игроков. Дилемма волонтеров. Аукцион второй цены. Игры с эскалирущим конфликтом.

3. Парадокс Браэсса и равновесие Вордропа. Пример. Формулировка теоремы об отношении 4/3.

4. Метод обратной индукции. Парадокс сети магазинов Зельтена. Равновесия, совершенные по подиграм. Примеры: динамический вариант игры Битва полов и игра Ультиматум.

5. Игра преследоапния лев и человек: выигрышная стратегия человека (с объяснением). Игровая формулировка определения предела последовательности.

6. Бесконечно повторяющиеся игры, стратегия спускового крючка и стратегия Титфотет. Теорема о том, когда первая из них является равновесием Нэша.

7. Правила голосования: большинство, большинство с повтором, последовательные сравнения. Очки Борда и Копленда. Победитель по Кондорсэ. Свойства: анонимность, нейтральность, оптимальность по Парето, монотонность, аксиомы участия и усиления.

8. Теорема о диктаторе: формулировка и доказатльство.

9. Принципы справедливого распределния. Задача Платона о флейте. Проблема спасательной лодки. Утилитаризм и эгалитаризм (их функции полезности).

10. Кооперативные игры распределения доходов и затрат. Ядро игры: определение и пример расчета.

Часть 2

1.Игры с конечным числом игроков и стратегий. Смешаные стратегии. Теорема Нэша: формулировка и доказательсво.

2.Теорема о минимксе: формулировка и доказательство.

3.Лемма о равенстве платежей для двух игроков и двух действий. Игра ястреба и голубки. Ее равновесия.

4. Эволюционно устойчивые стратегии (ESS): определение, основной критерий и связь с равновесием Нэша. ESS для игры ястреба и голубки.

5. Воспроизводящая динамика. Неподвижные точки и равновесия Нэша. Связь асимптотической устойчивости и ESS.

6. Основная теорема динамического программирования для игр: сведение двухшаговой игры к одношаговой. Классическая игра инспекции.

7. Фольклёрная теорема о бесконечно длящихся играх: формулировка и доказательство.

8. Классические модели ценообразования Бертрана и Курно (разобрать одну из двух).

9. Диффернциальные уравнения Беллмана и Айзекса для детерминированного управления и игр (эвристические выводы).

10. Диффернциальные уравнения Беллмана и Айзекса для стохастического управления и игр (эвристические выводы).

Часть 3

1. Понятие сильной и слабой полноты и арбитражных возможностей для компактного множества в евклидовом пространстве. Геометрическое понятие риск-нейтральной меры. Теорема о том, что риск нейтральная мера существует тогда и только тогда когда система слабо положительно полна.

2. Фундаментальная теорема ценоообразования в геометрической форме для конечного множества Е, порождающего некоторое евклидово пространстсво: Е свободно от арбитража тогда и только тогда ...

3. Доказать теорему о том, что если Е –это компактное множество в евклидовом пространстве размерности d, а р – это крайняя точка множеста риск-нейтральных мер, то р -- это линейная комбинация не более чем (d+1) мер Дирака.

4. Радужные опционы как игра с природой. Выражение хеджирующей цены через итерации оператора Беллмана. Представление оператора Беллмана через риск-нейтральные меры.

5. Классическая формула Кокса-Росса-Рубенштейна и ее вывод из представления цены через риск-нейтральные меры.

6. Вывод общего нелинейного уравнения Блэка-Шоулса из дискретных аппроксимаций. Частный случай: Классическое уравнение Блэка-Шоулса.

7. Мгновенные кредитные дефолтные свопы (CDS). Выражение хеджирующей цены условных требований, зависящих от дефолтов, через минимаксное представление и через явные риск-нейтральны меры.

8. Определение и доказательство существования существенного супремума семейства случайных величин. Определение понятий мартингала и моментов остановки. Проблема Снейла, определение обертки Снейла и формулировка основной теоремы об оптимальном моменте остановки.

9. Динамическое программирование для стохастических игр. Формулировка и доказательство основной теоремы о сведение двухшагоой игры к одношаговой для антагонистических игр.

10. Игры Дынкина и игровые опционы. Формулировка основной теоремы и итеративные формулы для вычисления цены (без доказательства).

Часть 4

1.Общая идея статистического предела для игр с большим числом игроков с конечным пространстсвом состояний. Предельное кинетическое уравнение. Формулировка и доказательство основного результата о связи неподвижных точек предельной динамики с равновесияим Нэша.

2.Примеры моделей: инспекция, коррупция, защита от террористов, защита от компьютерных и биологических атак.

3.Марковские цепочки в непрерывном времени. Вероятностное описание и аналитическое представление прямыми и обратными уравнениями Колмогорова.

4.Линейные УрЧП первого порядка и представления их решений через ОДУ (характеристики). Оценки производных (первого порядка) решений по начальным условиям для ОДУ и соответствующих УрЧП.

5.Задание системы частиц, взаимодействующих посредством среднего поля. Генератор этой марковской цепочки и его предел при бесконечном числе частиц. Оценка разности предельного и допредельного генераторов.

6.Формулировка и доказательство основной теоремы о слабой сходимости марковских цепочек, взаимодействующих посредством среднего поля, к предельной детерминированной динамике, в случае гладких коэффициентов.

7.Простейшие модели с двумя состояниями. Поведение на больших временах предельного ОДУ и допредельных марковских цепочек. Нелинейная игра ястреба/голубки.

8.Система частиц, взаимодействующих посредством среднего поля с учетом главного игрока и с учетом выделенного игрока. Задание соотвествуюшими генераторами. Пределы этих генераторов. Формулировка основной теоремы о сходимости.

9.Определение игр среднего поля для конечного числа состояний. Формулировка концепции решения в терминах условия согласованности и в терминах системы прямых и обратных уравнений. Формулировка основной теоремы о приближенных равновесиях Нэша для игр с конечным числом игроков.

10.Главное уравнение (master equation) для игр среднего поля. Его эвристический вывод.